БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Лабораторная работа № 7

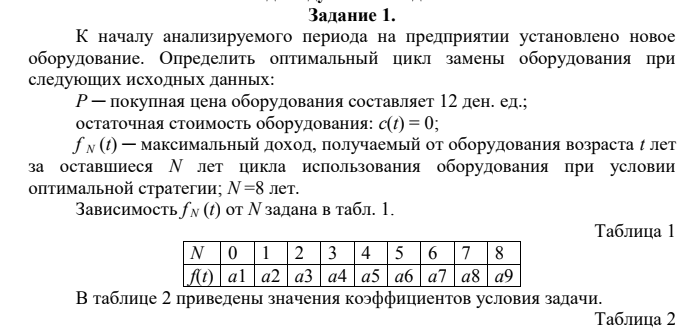
по дисциплине «Методы оптимизации»

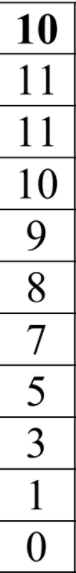
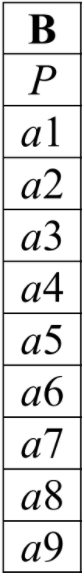
Вариант № 10

Выполнил студент: Ефименко Павел Викторович

группа 981063

Минск 2020





**I этап. Условная оптимизация** (k = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).

Переменной управления на k-м шаге является логическая переменная, которая может принимать одно из двух значений: сохранить (С) или заменить (З) оборудование в начале k-го года.

F(t) = max (r(t), (C); S(t) - P + r (0), (З)).

**1-й шаг**: k = 8. Для 1-го шага возможные t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, а функциональные уравнения имеют вид:

F8(1) = max (10; 0 - 11 + 11) = 10 (C)  
 F8(2) = max (9; 0 - 11 + 11) = 9 (C)  
 F8(3) = max (8; 0 - 11 + 11) = 8 (C)  
 F8(4) = max (7; 0 - 11 + 11) = 7 (C)  
 F8(5) = max (5; 0 - 11 + 11) = 5 (C)  
 F8(6) = max (3; 0 - 11 + 11) = 3 (C)  
 F8(7) = max (1; 0 - 11 + 11) = 1 (C)  
 F8(8) = max (0; 0 - 11 + 11) = 0 (C/З)

**2-й шаг**: k = 7. Для 2-го шага возможные t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, а функциональные уравнения имеют вид:

F7(1) = max (10 + 9; 0 - 11 + 11 + 10) = 19 (C)  
 F7(2) = max (9 + 8; 0 - 11 + 11 + 10) = 17 (C)  
 F7(3) = max (8 + 7; 0 - 11 + 11 + 10) = 15 (C)  
 F7(4) = max (7 + 5; 0 - 11 + 11 + 10) = 12 (С)  
 F7(5) = max (5 + 3; 0 - 11 + 11 + 10) = 10 (З)  
 F7(6) = max (3 + 1; 0 - 11 + 11 + 10) = 10 (З)  
 F7(7) = max (1 + 0; 0 - 11 + 11 + 10) = 10 (З)

**3-й шаг**: k = 6. Для 3-го шага возможные t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, а функциональные уравнения имеют вид:

F6(1) = max (10 + 17; 0 - 11 + 11 + 19) = 27 (C)  
 F6(2) = max (9 + 15; 0 - 11 + 11 + 19) = 24 (C)  
 F6(3) = max (8 + 12; 0 - 11 + 11 + 19) = 20 (С)  
 F6(4) = max (7 + 10; 0 - 11 + 11 + 19) = 19 (З)  
 F6(5) = max (5 + 10; 0 - 11 + 11 + 19) = 19 (З)  
 F6(6) = max (3 + 10; 0 - 11 + 11 + 19) = 19 (З)

**4-й шаг**: k = 5. Для 4-го шага возможные t = 1, 2, 3, 4, 5,   
а функциональные уравнения имеют вид:

F5(1) = max (10 + 24; 0 - 11 + 11 + 27) = 34 (C)  
 F5(2) = max (9 + 20; 0 - 11 + 11 + 27) = 29 (C)  
 F5(3) = max (8 + 19; 0 - 11 + 11 + 27) = 27 (C/З)  
 F5(4) = max (7 + 19; 0 - 11 + 11 + 27) = 27 (З)  
 F5(5) = max (5 + 19; 0 - 11 + 11 + 27) = 27 (З)

**5-й шаг**: k = 4. Для 5-го шага возможные t = 1, 2, 3, 4, а функциональные уравнения имеют вид:

F4(1) = max (10 + 29; 0 - 11 + 11 + 34) = 39 (C)  
 F4(2) = max (9 + 27; 0 - 11 + 11 + 34) = 36 (C)  
 F4(3) = max (8 + 27; 0 - 11 + 11 + 34) = 35 (C)  
 F4(4) = max (7 + 27; 0 - 11 + 11 + 34) = 34 (C/З)

**6-й шаг**: k = 3. Для 6-го шага возможные t = 1, 2, 3, а функциональные уравнения имеют вид:

F3(1) = max (10 + 36; 0 - 11 + 11 + 39) = 46 (C)  
 F3(2) = max (9 + 35; 0 - 11 + 11 + 39) = 44 (C)  
 F3(3) = max (8 + 34; 0 - 11 + 11 + 39) = 42 (C)

**7-й шаг**: k = 2. Для 7-го шага возможные t = 1, 2, а функциональные уравнения имеют вид:

F2(1) = max (10 + 44; 0 - 11 + 11 + 46) = 54 (C)  
 F2(2) = max (9 + 42; 0 - 11 + 11 + 46) = 51 (C)

**8-й шаг**: k = 1. Для 8-го шага возможные t = 1, а функциональные уравнения имеют вид:

F1(1) = max (10 + 51; 0 - 11 + 11 + 54) = 61 (C)

Результаты вычислений по уравнениям Беллмана Fk(t) приведены в таблице, в которой k - год эксплуатации, а t - возраст оборудования.  
Таблица – Матрица максимальных прибылей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k\t** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| **1** | **61** |  |  |  |  |  |  |  |
| **2** | **54** | **51** |  |  |  |  |  |  |
| **3** | **46** | **44** | **42** |  |  |  |  |  |
| **4** | **39** | **36** | **35** | **34** |  |  |  |  |
| **5** | **34** | **29** | **27** | **27** | **27** |  |  |  |
| **6** | **27** | **24** | **20** | **19** | **19** | **19** |  |  |
| **7** | **19** | **17** | **15** | **12** | **10** | **10** | **10** |  |
| **8** | **10** | **9** | **8** | **7** | **5** | **3** | **1** | **0** |

В таблице выделено красным значение функции, соответствующее состоянию (З) - замена оборудования.

При решении данной задачи в некоторых таблицах при оценке выбора нужного управления мы получали одинаковые значения F для обоих вариантов управления. В этом случае, в соответствии с алгоритмом решения подобных задач необходимо выбирать управление сохранения оборудования.

**II этап. Безусловная оптимизация** (k = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).  
**Решение при совершенно новом оборудовании** (0 лет)**.**

Плановый период N=8 лет.

К началу 1-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t1 = t0 + 1 = -1 + 1 = 0. Прибыль составит F1(0) = 1.

Оптимальное управление при k = 1, x1(0) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 0-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 2-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t2 = t1 + 1 = 0 + 1 = 1. Прибыль составит F2(1) = 54.

Оптимальное управление при k = 2, x2(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 3-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t3 = t2 + 1 = 1 + 1 = 2. Прибыль составит F3(2) = 44.

Оптимальное управление при k = 3, x3(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 4-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t4 = t3 + 1 = 2 + 1 = 3. Прибыль составит F4(3) = 35.

Оптимальное управление при k = 4, x4(3) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 3-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 5-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t5 = t4 + 1 = 3 + 1 = 4. Прибыль составит F5(4) = 27.

Безусловное оптимальное управление при k = 5, x5(4) = (З), т.е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо в этом году провести замену оборудования.

К началу 6-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t6 = t5 + 1 = 0 + 1 = 1. Прибыль составит F6(1) = 27.

Оптимальное управление при k = 6, x6(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 7-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t7 = t6 + 1 = 1 + 1 = 2. Прибыль составит F7(2) = 17.

Оптимальное управление при k = 7, x7(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 8-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t8 = t7 + 1 = 2 + 1 = 3. Прибыль составит F8(3) = 8.

Оптимальное управление при k = 8, x8(3) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 3-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

F1(0) → (C) → F2(1) → (C) → F3(2) → (C) → F4(3) → (C) → F5(4) → (З) → F6(1) → (C) → F7(2) → (C) → F8(3) → (C)

Таким образом, за 8 лет эксплуатации оборудования замену надо произвести:

- в начале 5-го года эксплуатации.

**Решение 2 при изначальном возрасте оборудования 4 года.**

Соответственно для построения данной стратегии нам так же не нужно пересчитывать снова все шаги. На этот раз достаточно не рассматривать первые 4 строк в матрице максимальных прибылей.

К началу 1-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t1 = t0 + 1 = 3 + 1 = 4. Прибыль составит F4(4) = 34.

Оптимальное управление при k = 4, x4(4) = (C/З), т.е. максимум дохода за годы с 4-го по 8-й достигается, как если оборудование сохраняется, так и если оно заменяется.

К началу 2-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t2 = t1 + 1 = 4 + 1 = 5. Прибыль составит F5(5) = 27.

Безусловное оптимальное управление при k = 5, x5(5) = (З), т.е. для получения максимума прибыли за оставшиеся годы необходимо в этом году провести замену оборудования.

К началу 3-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t3 = t2 + 1 = 0 + 1 = 1. Прибыль составит F6(1) = 27.

Оптимальное управление при k = 6, x6(1) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 1-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 4-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t4 = t3 + 1 = 1 + 1 = 2. Прибыль составит F7(2) = 17.

Оптимальное управление при k = 7, x7(2) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 2-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

К началу 5-го года эксплуатации возраст оборудования увеличится на единицу и составит: t5 = t4 + 1 = 2 + 1 = 3. Прибыль составит F8(3) = 8.

Оптимальное управление при k = 8, x8(3) = (C), т.е. максимум дохода за годы с 3-го по 8-й достигается, если оборудование сохраняется, т.е. не заменяется.

F1(4) → (C/З) → F2(5) → (З) → F3(1) → (C) → F4(2) → (C) → F5(3) → (C)

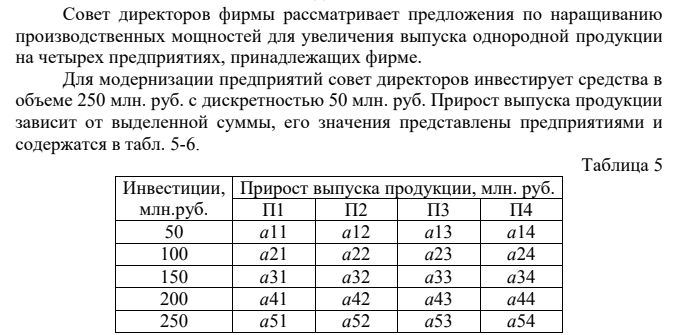
Таким образом, в отличии от нового оборудования, при изначальном возрасте 4 года, за 8 лет эксплуатации оборудования замену можно произвести:

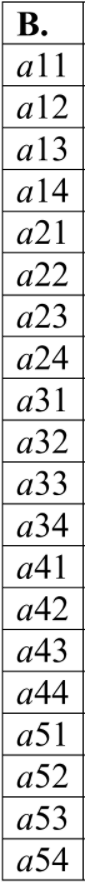
- в начале 1-го года эксплуатации;

Надо произвести:

- в начале 2-го года эксплуатации.

**Задание 2:**



**Исходные данные:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Инвестиции, млн. руб.** | **Прирост выпуска продукции, млн. руб.** | | | |
| **П1** | **П2** | **П3** | **П4** |
| **50** | **15** | **12** | **17** | **13** |
| **100** | **32** | **30** | **33** | **31** |
| **150** | **39** | **38** | **40** | **37** |
| **200** | **46** | **45** | **47** | **44** |
| **250** | **52** | **54** | **60** | **63** |

**I этап. Условная оптимизация**.

**Первый шаг:** k = 4.

Предположим, что все средства в количестве x4 = 250 отданы предприятию №4. В этом случае, максимальный доход, как это видно из таблицы, составит f4(u4) = 63, следовательно, F4(e4) = f4(u4).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **e3** | **u4** | **e4 = e3 - u4** | **f4(u4)** | **F4(e4)** | **u4(e4)** |
| **50** | **0** | **50** | **0** |  |  |
| **50** | **0** | **13** | **13** | **50** |
| **100** | **0** | **100** | **0** |  |  |
| **50** | **50** | **13** |  |  |
| **100** | **0** | **31** | **31** | **100** |
| **150** | **0** | **150** | **0** |  |  |
| **50** | **100** | **13** |  |  |
| **100** | **50** | **31** |  |  |
| **150** | **0** | **37** | **37** | **150** |
| **200** | **0** | **200** | **0** |  |  |
| **50** | **150** | **13** |  |  |
| **100** | **100** | **31** |  |  |
| **150** | **50** | **37** |  |  |
| **200** | **0** | **44** | **44** | **200** |
| **250** | **0** | **250** | **0** |  |  |
| **50** | **200** | **13** |  |  |
| **100** | **150** | **31** |  |  |
| **150** | **100** | **37** |  |  |
| **200** | **50** | **44** |  |  |
| **250** | **0** | **63** | **63** | **250** |

**Второй шаг:** k = 3.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F3(e3) = max (x3 ≤ e3) (f3(u3) + F4(e3-u3)).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **e2** | **u3** | **e3 = e2 - u3** | **f3(u3)** | **F3(e2)** | **F2(u3, e2)** | **F3(e3)** | **u3(e3)** |
| **50** | **0** | **50** | **0** | **13** | **13** |  |  |
| **50** | **0** | **17** | **0** | **17** | **17** | **50** |
| **100** | **0** | **100** | **0** | **31** | **31** |  |  |
| **50** | **50** | **17** | **13** | **30** |  |  |
| **100** | **0** | **33** | **0** | **33** | **33** | **100** |
| **150** | **0** | **150** | **0** | **37** | **37** |  |  |
| **50** | **100** | **17** | **31** | **48** | **48** | **50** |
| **100** | **50** | **33** | **13** | **46** |  |  |
| **150** | **0** | **40** | **0** | **40** |  |  |
| **200** | **0** | **200** | **0** | **44** | **44** |  |  |
| **50** | **150** | **17** | **37** | **54** |  |  |
| **100** | **100** | **33** | **31** | **64** | **64** | **100** |
| **150** | **50** | **40** | **13** | **53** |  |  |
| **200** | **0** | **47** | **0** | **47** |  |  |
| **250** | **0** | **250** | **0** | **63** | **63** |  |  |
| **50** | **200** | **17** | **44** | **61** |  |  |
| **100** | **150** | **33** | **37** | **70** |  |  |
| **150** | **100** | **40** | **31** | **71** | **71** | **150** |
| **200** | **50** | **47** | **13** | **60** |  |  |
| **250** | **0** | **60** | **0** | **60** |  |  |

**Третий шаг:** k = 2.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №2, 3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F2(e2) = max (x2 ≤ e2) (f2(u2) + F3(e2-u2)).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **e1** | **u2** | **e2 = e1 - u2** | **f2(u2)** | **F2(e1)** | **F1(u2, e1)** | **F2(e2)** | **u2(e2)** |
| **50** | **0** | **50** | **0** | **17** | **17** | **17** | **0** |
| **50** | **0** | **12** | **0** | **12** |  |  |
| **100** | **0** | **100** | **0** | **33** | **33** | **33** | **0** |
| **50** | **50** | **12** | **17** | **29** |  |  |
| **100** | **0** | **30** | **0** | **30** |  |  |
| **150** | **0** | **150** | **0** | **48** | **48** | **48** | **0** |
| **50** | **100** | **12** | **33** | **45** |  |  |
| **100** | **50** | **30** | **17** | **47** |  |  |
| **150** | **0** | **38** | **0** | **38** |  |  |
| **200** | **0** | **200** | **0** | **64** | **64** | **64** | **0** |
| **50** | **150** | **12** | **48** | **60** |  |  |
| **100** | **100** | **30** | **33** | **63** |  |  |
| **150** | **50** | **38** | **17** | **55** |  |  |
| **200** | **0** | **45** | **0** | **45** |  |  |
| **250** | **0** | **250** | **0** | **71** | **71** |  |  |
| **50** | **200** | **12** | **64** | **76** |  |  |
| **100** | **150** | **30** | **48** | **78** | **78** | **100** |
| **150** | **100** | **38** | **33** | **71** |  |  |
| **200** | **50** | **45** | **17** | **62** |  |  |
| **250** | **0** | **54** | **0** | **54** |  |  |

**Четвертый шаг.** k = 1.

Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между предприятиями №1, 2, 3, 4. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид: F1(e1) = max (x1 ≤ e1) (f1(u1) + F2(e1-u1)).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **e0** | **u1** | **e1 = e0 - u1** | **f1(u1)** | **F1(e0)** | **F0(u1, e0)** | **F1(e1)** | **u1(e1)** |
| **50** | **0** | **50** | **0** | **17** | **17** | **17** | **0** |
| **50** | **0** | **15** | **0** | **15** |  |  |
| **100** | **0** | **100** | **0** | **33** | **33** | **33** | **0** |
| **50** | **50** | **15** | **17** | **32** |  |  |
| **100** | **0** | **32** | **0** | **32** |  |  |
| **150** | **0** | **150** | **0** | **48** | **48** |  |  |
| **50** | **100** | **15** | **33** | **48** |  |  |
| **100** | **50** | **32** | **17** | **49** | **49** | **100** |
| **150** | **0** | **39** | **0** | **39** |  |  |
| **200** | **0** | **200** | **0** | **64** | **64** |  |  |
| **50** | **150** | **15** | **48** | **63** |  |  |
| **100** | **100** | **32** | **33** | **65** | **65** | **100** |
| **150** | **50** | **39** | **17** | **56** |  |  |
| **200** | **0** | **46** | **0** | **46** |  |  |
| **250** | **0** | **250** | **0** | **78** | **78** |  |  |
| **50** | **200** | **15** | **64** | **79** |  |  |
| **100** | **150** | **32** | **48** | **80** | **80** | **100** |
| **150** | **100** | **39** | **33** | **72** |  |  |
| **200** | **50** | **46** | **17** | **63** |  |  |
| **250** | **0** | **52** | **0** | **52** |  |  |

**Разъяснение построение таблиц и последовательность проведения расчетов:**

Столбцы 1 (вложенные средства), 2 (проект) и 3 (остаток средств) для всех трех таблиц одинаковы, поэтому их можно было бы сделать общими. Столбец 4 заполняется на основе исходных данных о функциях дохода, значения в столбце 5 берутся из столбца 7 предыдущей таблицы, столбец 6 заполняется суммой значений столбцов 4 и 5 (в таблице 4-го шага столбцы 5 и 6 отсутствуют).

В столбце 7 записывается максимальное значение предыдущего столбца для фиксированного начального состояния, и в 8 столбце записывается управление из 2 столбца, на котором достигается максимум в 7.

**Этап II. Безусловная оптимизация:**

Из таблицы 4-го шага имеем F1(e0 = 250) = 80. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e0 = 250 равен 80.

Из этой же таблицы получаем, что 1-му предприятию следует выделить u1(e0 = 250) = 100.

При этом остаток средств составит:

e1 = e0 - u1 = 250 - 100 = 150.

Из таблицы 3-го шага имеем F2(e1 = 150) = 48. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e1 = 150 равен 48.

Из этой же таблицы получаем, что 2-му предприятию следует выделить u2(e1 = 150) = 0.

При этом остаток средств составит:

e2 = e1 - u2 = 150 - 0 = 150.

Из таблицы 2-го шага имеем F3(e2 = 150) = 48. То есть максимальный доход всей системы при количестве средств e2 = 150 равен 48.

Из этой же таблицы получаем, что 3-му предприятию следует выделить u3(e2 = 100) = 50.

При этом остаток средств составит:

e3 = e2 - u3 = 150 - 50 = 100.

Последнему предприятию достается 100.

Итак, инвестиции в размере 250 необходимо распределить следующим образом:

* Первому предприятию выделить 100;
* Второму предприятию выделить 0;
* Третьему предприятию выделить 50;
* Четвертое предприятию выделить 100.

Что обеспечит максимальный доход, равный 80.